به نام خدا

مدولاسیون M-PAM باند پایه

$$x(t) = \sum_k a_k \, p(t-kD)$$

حاوی اطلاعات است

a_k در مورد (در جلسه گذشته) صحبت شد

بازه زمانی سمبل : $D = T$

$$K = \log_2 M$$

سمبل های K بیتی

نرخ سمبل $= R \equiv R_s = \frac{1}{D} = \frac{1}{T}$

symbol rate

بازه زمانی بیت $= T_b = \frac{T}{k} = \frac{D}{k} = \frac{D}{\log_2 M}$

نرخ بیت $= R_b = \frac{1}{T_b} = \frac{K}{D} = K R_s = R_s \log_2 M$

$$x(t) = \sum_k a_k \, p(t - kD)$$

که در آن $p(t)$ یک شکل پالس مشخص است که به آن پالس شکل‌دهی یا پالس شکل‌دهی چنین گفته می‌شود و خروجی مدولاتور را متناسب با وضعیت کانال تغییر می‌دهد.

شکل پالس $p(t)$ باید ویژگی‌های زیر را داشته باشد.

$$p(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = \pm D, \pm 2D, \pm 3D, \dots \end{cases} \qquad (1)$$

اگر شرط ① برقرار باشد، سمبل های مجاور در نقاط نمونه برداری بر روی یکدیگر تداخل نخواهند داشت.

به عنوان مثال: اگر در $t_m = mD$ از $x(t)$ نمونه برداری کنیم، داریم

$$x(t) = \sum_k a_k \, p(t - kD)$$

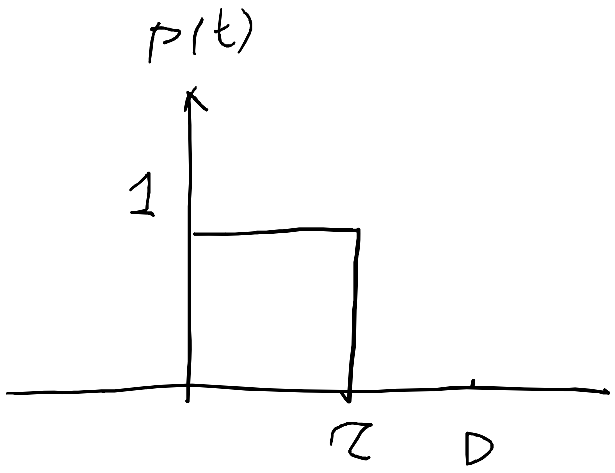
$$x(t)\Big|_{t=t_m} = \sum_k a_k\, p(t-kD)\Big|_{t=t_m=mD}$$

$$x(t_m) = a_m \overbrace{p(0)}^{1} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ k\neq m}} a_k\, \overbrace{p(mD-kD)}^{p((m-k)D)}}_{0}$$

(1) در صورت برقراری شرط

$$\Rightarrow \quad x(t_m) = a_m$$: سمپل بازه زمانی m ام

شکل پالسهای زیادی وجود دارند که شرط 1 را برآورده می کنند. به طور مثال



$p(t)$ به صورت مقابل و به ازای $\tau < D$

شرط 1 را برقرار می کند.

به طور مثال اگر بخواهیم $x(t)$ را به ازای چند سمبل نمونه

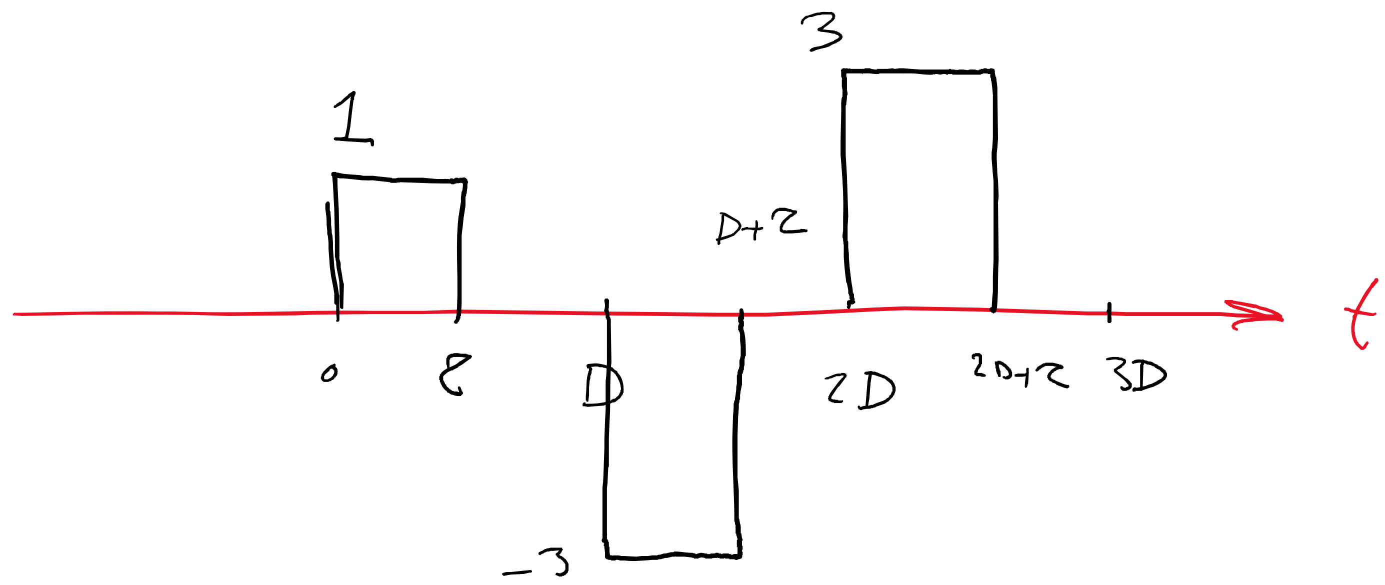
$a_0 = 1$

$a_1 = -3$

$a_2 = 3$

را با یک پالس $p(t)$ رسم کنیم، خواهیم داشت.

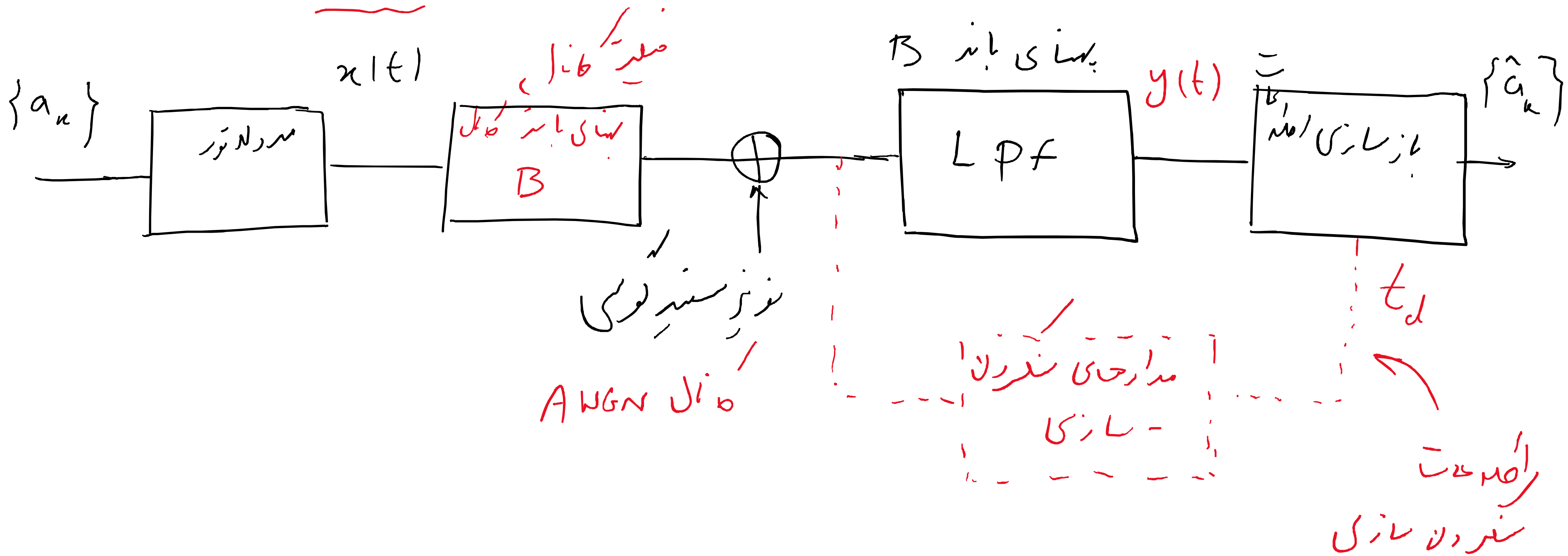
$x(t)$



$$x(t) = \sum_k a_k \, p(t - kD)$$

برای بررسی ساختار مدولاتور و دمدولاتور M-PAM باند پایه از بلوک دیاگرام ساده‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sum_k a_k p(t-kD)$$



سیگنال های اطلاعات ارسالی بعد از عملیات مدولاسیون از کانال مخابراتی عبور می کنند که به صورت یک فیلتر کانال مدل سازی است. نویز سفید گوسی هم در ورودی گیرنده با شکل موج دریافتی از کانال جمع می شود و به گیرنده می رسد. در گیرنده ابتدا با یک فیلتر پایین گذر شکل موج ارسالی را در پهنای باند سیستم استخراج می کنیم (اطلاعات خارج از باند سیستم حذف می شود) سپس با توجه به سیگنال دریافتی عملیات بازیابی اطلاعات را انجام می دهیم.

به این ترتیب سیگنال دریافتی در ورودی بلوک بازیابی اطلاعات (آشکارساز Detector) را می‌توان به صورت زیر مدل‌سازی کرد.

$$y(t) = \sum_k a_k \tilde{p}(t - kD - t_d) + \underbrace{n(t)}$$

نویز سفید گوسی

همان‌طور که می‌بینیم شکل پالس $p(t)$ از فیلتر کانال و فیلتر گیرنده عبور کرده است

به دلیل ایده آل نبودن این فیلترها، شکل پالس دریافتی دقیقاً همان شکل پالس ارسالی $p(t)$ نخواهد بود. این شکل پالس تغییر یافته را با $\tilde{p}(t)$ نمایش می‌دهیم. باید توجه داشته باشیم که $\tilde{p}(t)$ لزوماً شرط (1) را برقرار نمی‌کند.

t_d نشان دهنده تاخیر بین فرستنده و گیرنده است. این تاخیر باید برای بلوک اسطارساز مشخص باشد تا بتواند در زمان درست از $y(t)$ نمونه برداری کند و سمبل مربوط به آن زمان را بازیابی کند. به همین دلیل در گیرنده از مدارهای سنکرون سازی برای تخمین t_d استفاده می‌شود. در ادامه فرض می‌کنیم t_d برای گیرنده مشخص باشد.

فرض کنیم می خواهیم در گیرنده، سمبل m ام را بازیابی کنیم. به همین دلیل از سیگنال دریافتی $y(t)$ نمونه برداری می کنیم. زمان درست نمونه برداری برای سمبل m ام برابر

$$t_m = mD + t_d$$

است.

$$y(t) = \sum_k a_k \tilde{P}(t - kD - t_d) + n(t)$$

$$\xrightarrow{\text{نمونه برداری}} \quad y(t)\Big|_{t=t_m} = y(t_m)$$

$$\Rightarrow y(t_m) = \sum_{k} a_k \tilde{p}(mD + t_d - kD - t_d) + \underbrace{n(t_m)}_{n_m}$$

نمونه نویز سفید گوسی در زمان $t = t_m$

$$\Rightarrow y(t_m) = a_m \tilde{p}(0) + \sum_{k \neq m} a_k \tilde{p}((m-k)D) + n_m$$

$$\Rightarrow y(t_m) = y_m$$

$$= \underbrace{a_m \tilde{p}(0)}_{} + \underbrace{\sum_{k \neq m} a_k \tilde{p}\big((m-k)D \pm t_d\big)}_{} + n_m$$

نویز جمع شونده

نمونه سمبل مورد نظر برای آشکارسازی

$\tilde{p}(0) = 1$

اگر شرط ① برای $\tilde{p}(t)$ برقرار نباشد

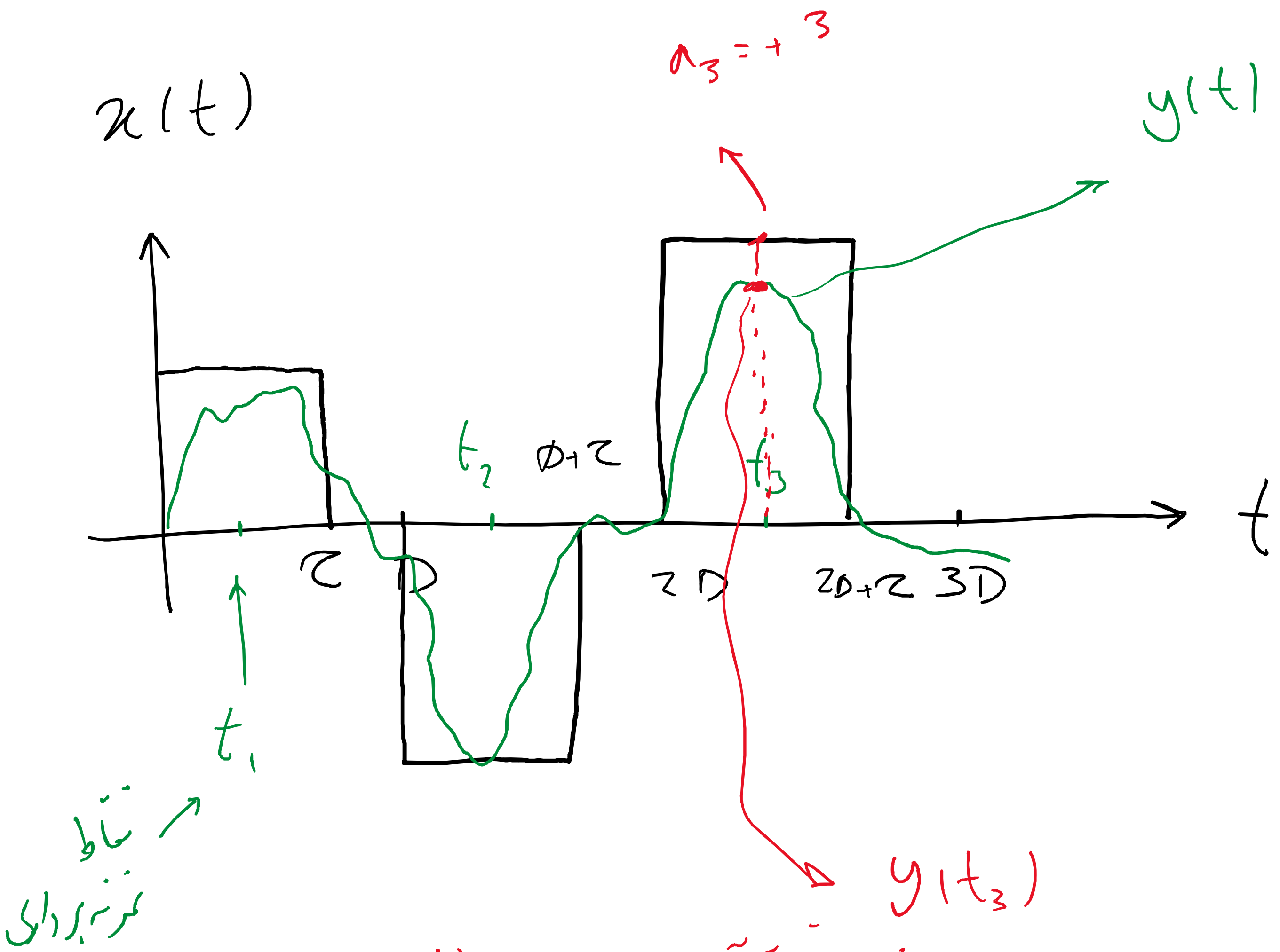
این جز صفر نشود و تداخل از سمبل های

مجاور روی سمبل اصلی خواهیم داشت که به آن

تداخل بین سمبلی (ISI) می گوییم

Inter symbol Interference

به عنوان مثال :

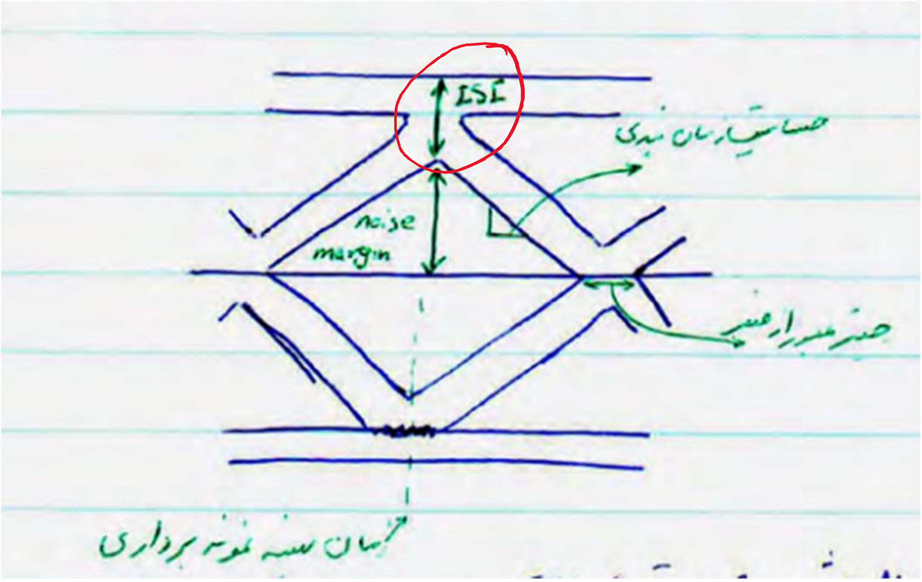


به علت نویز و تداخل الزاماً همان a_3 نخواهد بود

برای حذف تداخل در گیرنده از تکنیک های مختلفی استفاده می شود که ساده ترین آنها استفاده از همسان ساز (equalizer) است.

در ادامه می خواهیم ساختار گیرنده را برای بازیابی اطلاعات بررسی کنیم و فرض می کنیم که ISI با دقت خوبی حذف شده باشد. یعنی بازیابی اطلاعات را فقط در حضور نویز جمع شونده گوسی انجام می دهیم.

دیاگرام چشمی در حضور تداخل



* در مدولاسیون M-ary به تعداد M-1 چشم در دیاگرام ظاهر می‌شود.

* هرچه ISI بیشتر باشد، دیاگرام چشمی بسته‌تر خواهد بود

* براساس قضیه نایکوئیست، اگر پهنای باند کانال برابر B باشد داده‌ها را با نرخی برابر $r \leq 2B$ روی کانال ارسال کنیم، می‌توانیم اطلاعات ارسالی را بدون ISI دریافت و بازیابی کنیم. اگر $r > 2B$ برقرار باشد، حتماً ISI رخ می‌دهد و قبل از بازیابی اطلاعات باید از مدارهای جبران ISI مانند همسان‌سازها استفاده کنیم.

در ادامه می‌خواهیم بازیابی اطلاعات را برای مدولاسیون M-PAM با فرض اینکه در شکل موج دریافتی ISI وجود ندارد، بررسی کنیم.

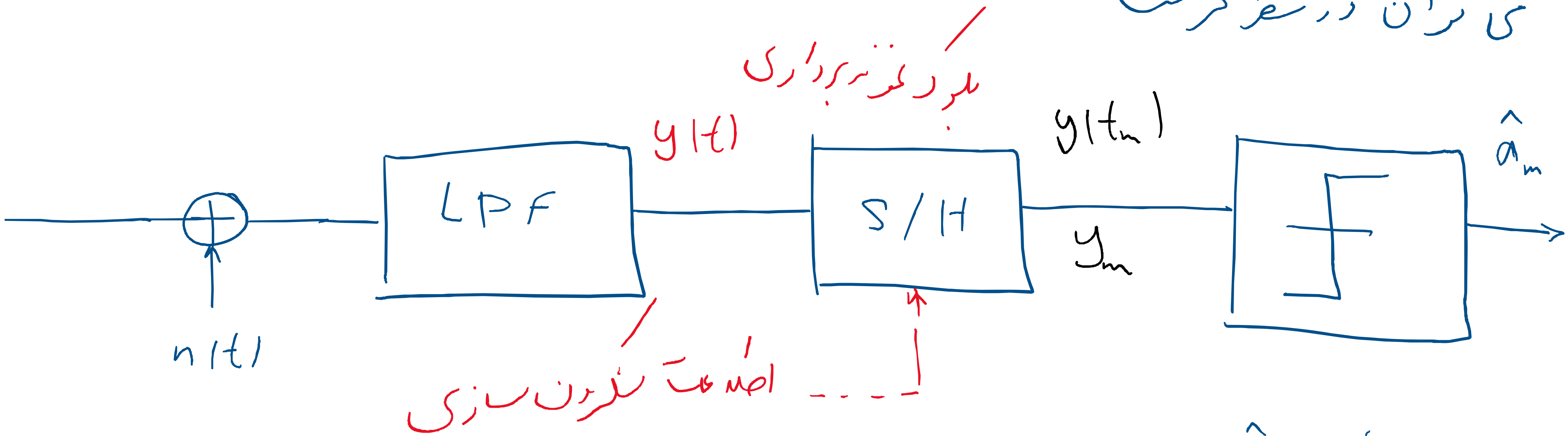
در ادامه برای $M=2$ عملیات آشکارسازی را بررسی خواهیم کرد. این عملیات به راحتی قابل تعمیم به حالت های $M>2$ است.

همان طور که می دانیم، پس از نمونه برداری برای سمبل m ام، داریم

$$y_m = y(t_m) \underset{\text{بدون رخداد ISI}}{=} a_m \tilde{p}(0) + n_m \underset{\tilde{p}(0)=1}{=} a_m + n_m$$

$$a_m \in \{(2m-1-M)d\}_{m=1}^{M}$$

برای ازای لحظات در بلوک آشکارساز ، این مقدار نمونه برداری شده باید
سطح آستانه مقایسه می شود. بنابراین بلوک دیاگرام زیر را برای آشکارسازی
می توان در نظر گرفت



$$\hat{a}_m \in \{(2m-1-M)d\}$$

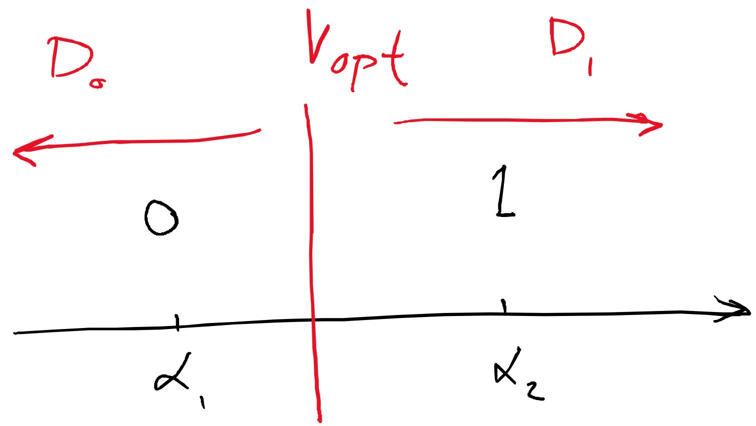
در حالت باینری نقاط دو سطح داریم $= \{\pm d\} = \{d_1 , d_2\}$

بدین ترتیب قانون تصمیم گیری برای بازیابی سمبل ها در حالت باینری به صورت زیر خواهد بود

$$
\begin{cases}
y_m = y(t_m) > V_{opt} \longrightarrow \text{سطح } \alpha_2 \text{ (بیت 1 ارسال شده)} \\[2ex]
y_m = y(t_m) < V_{opt} \longrightarrow \text{سطح } \alpha_1 \text{ (بیت 0 ارسال شده)}
\end{cases}
$$

$y_m \in D_0 \longrightarrow$ بیت '0' ارسال شده

$y_m \in D_1 \longrightarrow$ بیت '1' ارسال شده



بنابراین برای طراحی گزینه بهینه برای بازیابی اطلاعات، باید V_{opt} را به گونه‌ای
به دست بیاوریم که احتمال خطا در بازیابی اطلاعات کمترین مقدار ممکن باشد.

بنابراین در ادامه احتمال خطا در بازیابی اطلاعات را برای یک سطح آستانه V
به دست می‌آوریم و احتمال خطا را برحسب V مینیمم می‌کنیم تا به سطح آستانه
بهینه V_{opt} برسیم.

ابتدا پیش‌آمد خطا را بیان می‌کنیم و سپس احتمال آن را محاسبه می‌کنیم.

پیش آمد خطا (در حالت باینری) (پیش آمد e) = پیش آمد آنکه فرستنده بیت "0" را ارسال کرده باشد و گیرنده بیت "1" را بازیابی کند یا فرستنده بیت "1" را ارسال کرده باشد و گیرنده بیت "0" را بازیابی کند

$$\Longrightarrow \quad P_e = P_r\{e\} \underset{\uparrow}{=} P_r\{T_0\}\,P_r\{H_1 \mid T_0\} + P_r\{T_1\}\,P_r\{H_0 \mid T_1\}$$

تجزیه احتمال کلی

T_0 : پیش‌آمد اینکه فرستنده بیت '0' را بفرستد

T_1 : 〃 〃 〃 〃 '1' را بفرستد

H_0 : 〃 〃 گیرنده بیت '0' را بازیابی کند

H_1 : 〃 〃 گیرنده بیت '1' را بازیابی کند

$$\Rightarrow P_e = \overbrace{P_r\{T_0\}}^{P_0} P_r\{H_1 | T_0\} + \overbrace{P_r\{T_1\}}^{P_1} P_r\{H_0 | T_1\}$$

P_0 و P_1 احتمال ارسال بیت "0" و "1" در فرستنده هستند که از خصوصیات منبع اطلاعات ارسالی است و برای فرستنده و گیرنده مشخص است. به این احتمالات احتمالات اولیه یا احتمالات پیشین (apriori prob) گفته می‌شود.

$$\Rightarrow P_e = P_0\, P(H_1 | T_0) + P_1\, P(H_0 | T_1)$$

$$= P_0\, P_r\{y_m > V | T_0\} + P_1\{y_m < V | T_1\}$$

قانون تصمیم‌گیری

قانون تصمیم گیری :

$$\begin{cases} y_m > V \longrightarrow H_1 \quad (\alpha_2 \text{ سطح}) \\ y_m < V \longrightarrow H_0 \quad (\alpha_1 \text{ سطح}) \end{cases}$$

$$P_e = P_0 \, P_r (y_m > V \mid T_0) + P_1 \, P_r \{ y_m < V \mid T_1 \}$$

$$\underbrace{y_m}_{\text{مشاهدات}} = a_m + n_m \quad , \quad a_m \in \{ \alpha_1 , \alpha_2 \}$$

$n_m \longrightarrow$ نمونه نویز یک متغیر تصادفی

می دانیم احتمال هر پیش آمدی در ارتباط با یک متغیر تصادفی با انتگرال تابع چگالی احتمال آن روی آن پیش آمد برابر است. بنابراین داریم

$$P_e = P_0 \, P_r\{y_m > V \mid T_0\} + P_1 \, P_r\{y_m < V \mid T_1\}$$

$$P_e = P_0 \int_V^{\infty} P(y_m \mid T_0)\, dy_m + P_1 \int_{-\infty}^{V} P(y_m \mid T_1)\, dy_m$$

که در آن $P(y_m | T_0)$ و $P(y_m | T_1)$ توابع چگالی احتمال شرطی

متغیر تصادفی y_m به شرط ارسال بیت '0' است α_1 یا بیت '1' است

α_2 در فرستنده هستند.

برای مینیمم کردن P_e در یافتن V_{opt} از P_e نسبت به V مشتق می‌گیریم

و حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم. از حل این معادله V_{opt} به دست می‌آید.

$$\frac{\partial P_e}{\partial V} = 0 \longrightarrow V_{opt}$$

$$P_e = P_0 \int_V^{\infty} P(y_m | T_0)\, dy_m + P_1 \int_{-\infty}^{V} P(y_m | T_1)\, dy_m$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial V} = -P_0\, P(y_m | T_0)\Big|_{y_m = V_{opt}} + P_1\, P(y_m | T_1)\Big|_{y_m = V_{opt}} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad P_1\, P(y_m \mid T_1)\Big|_{y_m = V_{opt}} = P_0\, P(y_m \mid T_0)\Big|_{y_m = V_{opt}}$$

بنابراین برای بدست آوردن سطح آستانه بهینه $P(y_m|T_1)$ و $P(y_m|T_0)$ را بدست می‌آوریم. V_{opt} محل برخورد دو منحنی $P_1 P(y_m|T_1)$ و $P_0 P(y_m|T_0)$ است.

می‌دانیم

$$y_m = \underbrace{a_m}_{\text{سطوح سیگنالینگ}} + \underbrace{n_m}_{\text{متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال } f_N(n)}$$

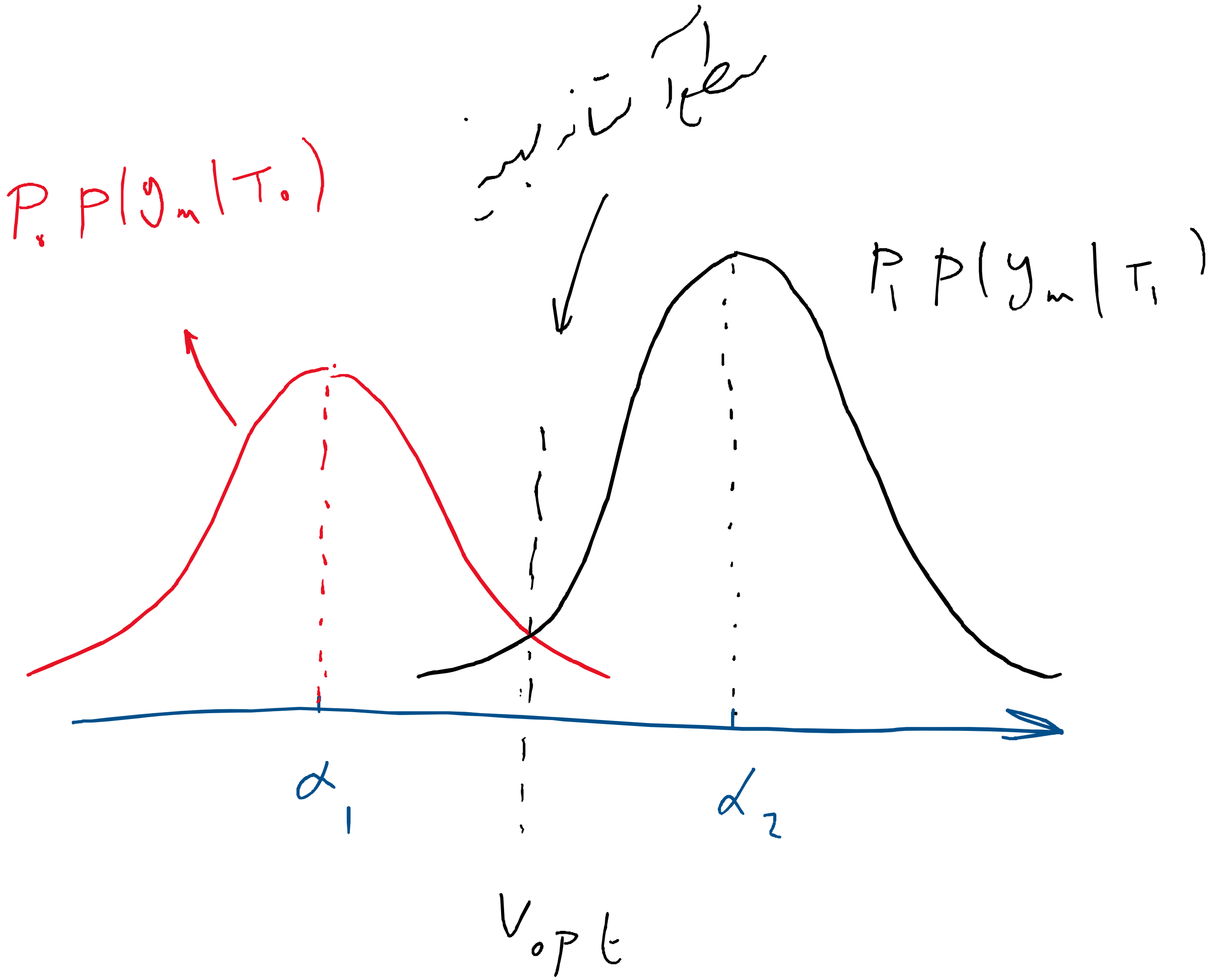
$$y_m = \begin{cases} \alpha_1 + n_m & T_0 \\ \alpha_2 + n_m & T_1 \end{cases}$$

$$a_m \in \{ \underset{\uparrow\, T_0}{\alpha_1} \,,\, \underset{\uparrow\, T_1}{\alpha_2} \}$$

به دست آوردن توابع احتمال شرطی

$$\begin{cases} P(y_m \mid T_0) = f_N(n-\alpha_1) \\ P(y_m \mid T_1) = f_N(n-\alpha_2) \end{cases}$$

و V_{opt} محل برخورد دو منحنی $P_0\, p(y_m|T_0)$ و
$P_1\, p(y_m|T_1)$ است.



به عنوان مثال، می‌خواهیم ساختار گیرنده بهینه را برای $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$

و نویز جمع شونده گوسی $n_m \sim N(0, \sigma^2)$ به دست بیاوریم.

(تمرین: برای حالتی که $P_0 \neq P_1$ این مثال را تکرار کنید)

$$\begin{cases} y_m > V_{opt} \longrightarrow H_1 & \text{بیت '1'} \\ y_m < V_{opt} \longrightarrow H_0 & \text{بیت '0'} \end{cases}$$

که در آن V_{opt} محل برخورد منحنی $P_0 P(y_m|T_0)$ و $P_1 P(y_m|T_1)$ است. برای متغیر تصادفی گوسی $n_m \sim N(0, \sigma^2)$ داریم.

$$y_m = a_m + n_m \quad , \quad a_m \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

$$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(n-0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$P(y_m \mid T_0) = f_N(y_m - \alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(y_m - \alpha_1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$P(y_m \mid T_1) = f_N(y_m - \alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_m - \alpha_2)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{P_0}\, P(y_m \mid T_0)\Big|_{V_{opt}} = \cancel{P_1}\, P(y_m \mid T_1)\Big|_{V_{opt}}$$

یعنی در حالتی که $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$ برقرار باشد، V_{opt} محل برخورد دو منحنی

$$P(y_m \mid T_0) \quad , \quad P(y_m \mid T_1)$$

است.

که در حالت نویز گوسی

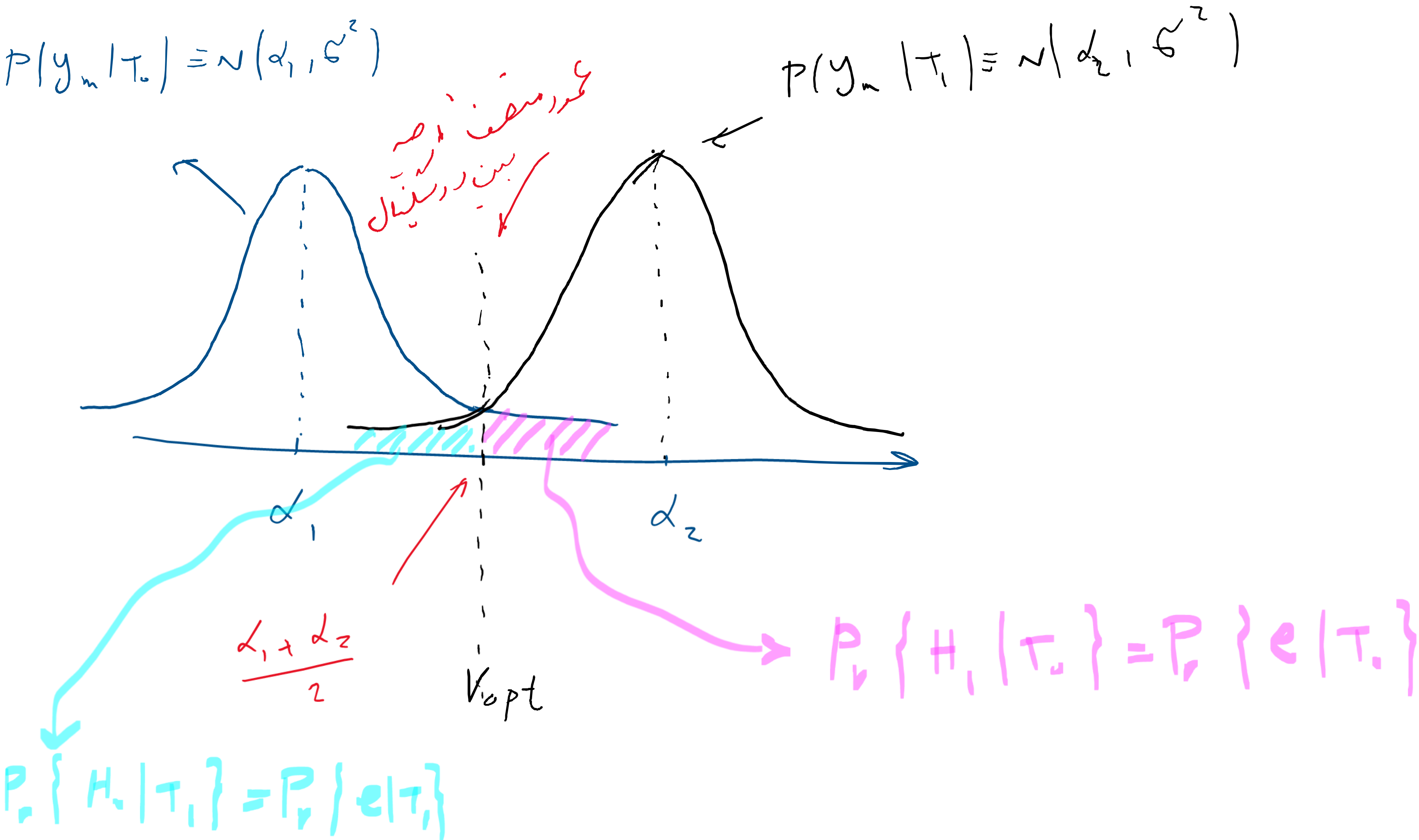
$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}} \exp\left(-\frac{(y_m-\alpha_1)^2}{2\sigma^2}\right) = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}} \exp\left(-\frac{(y_m-\alpha_2)^2}{2\sigma^2}\right)$$

از طرفین لاگ می‌گیریم

$$\cancel{-}\frac{\overbrace{(y_m-\alpha_1)^2}^{y_m^2-2\alpha_1 y_m+\alpha_1^2}}{2\cancel{\sigma^2}}\Bigg|_{V_{opt}} = \cancel{-}\frac{\overbrace{(y_m-\alpha_2)^2}^{y_m^2-2\alpha_2 y_m+\alpha_2^2}}{2\cancel{\sigma^2}}\Bigg|_{V_{opt}}$$

$$\Rightarrow \quad V_{opt} = \frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{2(\alpha_2-\alpha_1)} = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

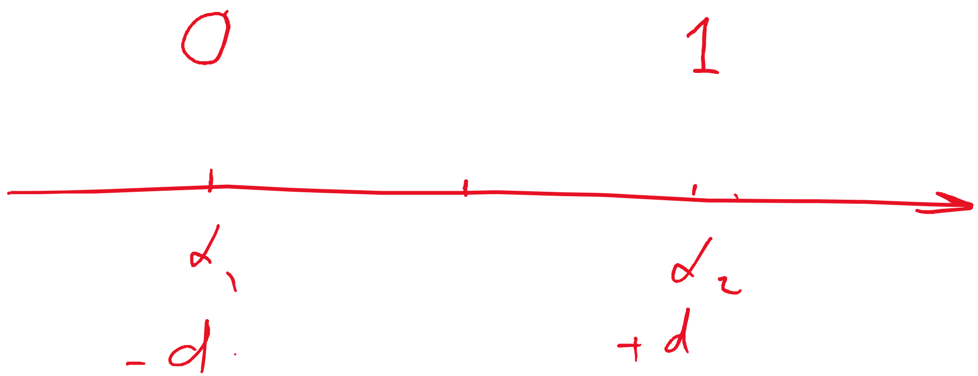
نقطه‌ی وسط دو سیگنال



$P(y_m | T_0) \equiv N(\alpha_1, \sigma^2)$
$P(y_m | T_1) \equiv N(\alpha_2, \sigma^2)$
عمود منصف فاصله بین دو سیگنال
α_1
α_2
$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$
V_{opt}
$P_r\{H_1 | T_0\} = P_r\{e | T_0\}$
$P_r\{H_0 | T_1\} = P_r\{e | T_1\}$

قانون تصمیم گیری بهینه $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} y_m > \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = V_{opt} \longrightarrow H_1 \\[2ex] y_m < \dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = V_{opt} \longrightarrow H_0 \end{cases}$$



* احتمال خطای گیرنده‌ی بهینه را در این حالت به دست بیاوریم:

$$P_e = P_0 \, P_r \left(H_1 \mid T_0 \right) + P_1 \, P_r \left(H_0 \mid T_1 \right)$$

$$P_e = P_0 \, P_r \left\{ y_m > V_{opt} \mid T_0 \right\} + P_1 \, P_r \left\{ y_m < V_{opt} \mid T_1 \right\}$$

$$V_{opt} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad , \quad n_m \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow P_e = P_0 \underbrace{\int_{V_{opt}}^{\infty} P(y_m \mid T_0)\, dy_m}_{P_r\{e \mid T_0\}} + P_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{V_{opt}} P(y_m \mid T_1)\, dy_m}_{P_r\{e \mid T_1\}}$$

$$\xRightarrow{\text{تقارن توزیع گوسی}} P_r\{e \mid T_0\} = P_r\{e \mid T_1\} = Q\left(\frac{|V_{opt} - \alpha_2|}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow P_r(e \mid T_0) = P_r(e \mid T_1) = Q\left(\frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2\sigma}\right)$$

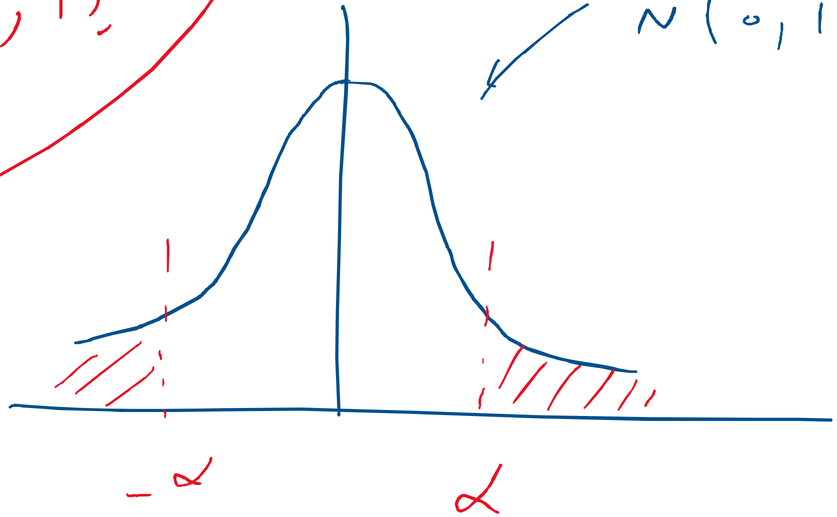
$$\xrightarrow{P_0 = P_1 = 1/2} P_e = P_r\{e \mid T_0\} = P_r\{e \mid T_1\} = Q\left(\frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{2\sigma}\right)$$

که در آن

$$|\alpha_2 - \alpha_1| = d_{12}$$ = فاصله اقلیدسی بین دو سیگنال

$$\xrightarrow[\text{نویز گوسی}]{P_0 = P_1 = \frac{1}{2}} P_e = Q\left(\frac{d_{12}}{2\sigma}\right)$$

یادآوری



$$N(0,1) = f_{X}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad , \quad X \sim N(0,1)$$

$$Q(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$Q(-|\alpha|) = 1 - Q(|\alpha|)$$

$$Y \sim N(m, \sigma^2) \rightarrow P_r\{Y > \beta\} = \int_{\beta}^{\infty} f_Y(y)\,dy = Q\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right)$$

$$Y = \sigma X + m$$